ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ и ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

XIV Сем. № 166. № 10.

Старое и новое о нѣкоторыхъ простѣйшихъ физическихъ явленіяхъ.

ДАВЛЕНІЕ ВОЗДУХА.

Глава первая.

Старое.

(*Продолженіе* *))



III.

Въ 1644 году отецъ Мерсеннъ (монахъ францисканскаго ордена) получилъ въ Парижѣ письмо изъ Италіи, въ которомъ былъ описанъ опытъ Торричелли безъ наименованія автора, „такъ что намъ,—говоритъ Паскаль въ письмѣ, отъ 12-го іюля 1651 года, къ де-Рибейръ (de Rebeyre), первому президенту суда въ Клермонъ-Ферранѣ, — осталось неизвѣстнымъ, кѣмъ опытъ былъ произведенъ. Отецъ Мерсеннъ пробовалъ повторить его въ Парижѣ; но опытъ не совсѣмъ удался, и онъ болѣе о немъ не думалъ. Потомъ, бывши для другихъ дѣлъ въ Римѣ, онъ ближе узналъ, какъ надо дѣлать опытъ, и вернулся вполнѣ съ нимъ ознакомленный“.

„До насъ въ Руанъ, гдѣ я тогда былъ, продолжаетъ Паскаль, извѣстія эти дошли въ 1646 году. Мы сдѣлали опытъ, онъ очень хорошо удался. Я повторялъ его много разъ и, убѣдившись въ вѣрности, сталъ выводить слѣдствія. Для оправданія ихъ сдѣлалъ новые опыты, весьма отличные отъ опыта Торричелли, въ присутствіи пятисотъ че-

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“ № 164.

ловѣкъ разнаго званія, между которыми было пять или шесть отцевъ іезуитовъ изъ Коллежа въ Руанѣ. Слухъ о моихъ опытахъ распространился въ Парижѣ. Ихъ стали смѣшивать съ италіанскими опытами и въ смѣшеніи этомъ одни, дѣлая мнѣ болѣе чести чѣмъ заслужилъ, приписывали мнѣ и италіанскій опытъ; другіе же, съ противоположной несправедливостью отнимали у меня и тѣ опыты, которые я сдѣлалъ; чтобы воздать должное и другимъ и себѣ, я въ 1647 году напечаталъ о моихъ опытахъ".

Описаніе въ формѣ небольшой брошюры было озаглавлено „Новые опыты касательно пустоты" („Nouvelles expériences touchant le vide"). Описавъ, въ обращеніи къ читателю, италіанскій опытъ, Паскаль излагаетъ восемь сдѣланныхъ имъ опытовъ. Два главнѣйшихъ были сдѣланы съ длинною стеклянною трубкою въ 46 футовъ длины, представлявшею собою водяной барометръ, и съ сифономъ большихъ размѣровъ, котораго длинное колѣно было въ 50, а короткое въ 45 футовъ. Такой сифонъ, „вопреки въ теченіе столькихъ вѣковъ всѣми принятому мнѣнію" не переливалъ воды.

Несмотря на всю наглядность опытовъ, у Паскаля въ первомъ сочиненіи этомъ рѣчи нѣтъ о давленіи или тяжести воздуха. Весь интересъ сосредоточенъ на томъ, что опыты эти служатъ доказательствомъ возможности пустоты въ природѣ и того, что боязнь пустоты въ природѣ имѣетъ предѣлъ. Мы упоминали выше, что та же мысль была у Галилея, когда онъ узналъ объ опытѣ съ длиннымъ насосомъ. Такъ далеки еще были великіе умы вѣка отъ идеи о давленіи воздуха.

IV.

Горячимъ противникомъ первыхъ изслѣдованій Паскаля выступилъ ученый іезуитъ отецъ Ноель въ духѣ отходившей уже эпохи, когда въ наукѣ, даже въ области естествознанія, все сводилось главнымъ образомъ къ словопреніямъ въ писаніяхъ и диспутахъ. Отецъ Ноель обѣщалъ выставить свидѣтелей противъ свидѣтелей, то есть — замѣчаетъ Паскаль — „опыты противъ опытовъ", но никакихъ опытовъ онъ и не повторялъ, ни вновь не дѣлалъ. Все сводится къ игрѣ соображеній, которымъ нельзя отказать въ тонкости и остроуміи. Послѣднее слово осталось за отцемъ Ноелемъ. „Всѣ споры такого рода, писалъ Паскаль къ Лепальеру (M. Le Pailleur)—могутъ длиться въ безконечность, если кто либо самъ не прерветъ... Возрастъ, заслуги, положеніе отца Ноеля побудили меня уступить ему послѣднее слово". Эпизодъ о спорѣ отца Ноеля съ Паскалемъ разсказанъ нами много лѣтъ тому назадъ въ рѣчи „Въ чемъ духъ естествовѣдѣнія" (произнесенной 12 января 1867 года на актѣ въ Московскомъ университетѣ). Приведемъ этотъ разсказъ.

Ученый противникъ Паскаля не отрицалъ его опытовъ. Онъ даже *прочелъ* ихъ съ удовольствіемъ: j'ai lu vos *Expériences touchant le vide*, que j'estime fort belles et ingénieuses", пишетъ онъ къ Паскалю. Но его интересуютъ не самые опыты: ему и въ мысль не входитъ предаться, какъ предался Паскаль, изслѣдованію новой области явленій и разрѣшенію возбуждаемыхъ ими вопросовъ. Для опытовъ настоящихъ

и будущихъ у него всегда готово объясненіе. Но вопросъ, въ которомъ онъ чувствуетъ себя дома, есть вопросъ о томъ, возможна ли пустота въ природѣ. Онъ беретъ на себя защищать природу отъ пустоты, и послѣ обмѣна писемъ съ Паскалемъ, излагаетъ свои возраженія въ возможно изящной формѣ въ брошюрѣ *Наполненная пустота* („Le Plein du Vide"), посвященной принцу Конти, которую онъ съ ловкостью куртизана, начинаетъ такимъ образомъ: „Природа нынѣ обвиняется въ пустотѣ, и я предпринимаю защитить ее отъ этого обвиненія въ присутствіи вашего высочества; ее въ этомъ подозрѣвали и прежде, но никто не имѣлъ дерзости отъ подозрѣній перейти къ дѣлу и поставить ее на очную ставку съ чувствами и опытомъ. Я докажу ея невинность и выведу на свѣтъ какъ ложность взводимыхъ на нее обвиненій, такъ и клеветы выставляемыхъ противъ нея свидѣтелей. Еслибъ она всѣмъ была извѣстна, какъ извѣстна вашему высочеству, которому она открыла всѣ свои секреты, ее никто не рѣшился бы обвинять, и поостереглись бы начинать противъ нея процессъ на основаніи ложныхъ показаній и плохихъ опытовъ. Смѣю надѣяться, ваше высочество не оставите безъ наказанія эти клеветы. И если для полнѣйшаго оправданія природы необходимо, чтобъ она доставила опытъ и выставила свидѣтеля противъ свидѣтеля, то, вспомнивъ, что умъ вашего высочества наполняетъ всѣ ея части и проникаетъ предметы міра наиболѣе скрытые и темные, никто, принцъ, не осмѣлится утверждать, по отношенію, по крайней мѣрѣ, къ вашему высочеству, чтобъ была пустота въ природѣ".

Отецъ Ноель не признавалъ, чтобы пространство вверху барометрической трубки было дѣйствительно пустымъ. „Я не понимаю вашей *кажущейся пустоты* (vide apparent) въ трубкѣ послѣ пониженія ртути или воды, пишетъ онъ къ Паскалю. Я утверждаю, что эта кажущаяся пустота есть тѣло, ибо она дѣйствуетъ какъ тѣло, пропуская свѣтъ съ преломленіемъ и отраженіемъ и замедляя движеніе тѣлъ какъ можно замѣтить при движеніи ртути, когда трубка, наполненная этою пустотой, бываетъ опрокинута. Ртуть, слѣдовательно, замѣщается другимъ тѣломъ. Какимъ, сейчасъ увидимъ". Воздухъ по ученію отца Ноеля, состоитъ изъ двухъ частей: одной болѣе грубой, другой болѣе тонкой, способной проходить чрезъ поры тѣлъ. Когда ртуть опускается въ трубкѣ, то этотъ тонкій воздухъ входитъ чрезъ малыя поры стекла, принуждаемый къ такому отдѣленію отъ болѣе грубаго элемента тяжестью ртути, опускающейся въ трубкѣ и тянущей за собою тонкій воздухъ, наполняющій поры стекла; а этотъ тянетъ за собою сосѣдній, пока не наполнится пространство, оставленное ртутью. Но опускающаяся ртуть въ состояніи вытянуть изъ воздуха тонкій элементъ лишь до извѣстнаго предѣла, послѣ котораго ртуть перестаетъ опускаться, не будучи въ состояніи увлекать далѣе тонкій элементъ, удерживаемый въ свою очередь окружающимъ внѣшнимъ воздухомъ, съ которымъ находится въ сообщеніи чрезъ поры. Впрочемъ, въ другихъ мѣстахъ своихъ писаній отецъ Ноель тотъ же вопросъ о пониженіи ртути до извѣстнаго предѣла объясняетъ нѣсколько иначе, ссылаясь и на боязнь пустоты, и на стремленіе эѳира подниматься вверхъ, и даже отчасти на тяжесть воздуха. Паскаль, съ своей стороны, утверждалъ

напротивъ, что пространство вверху барометра „не наполнено никакимъ веществомъ, извѣстнымъ въ природѣ и подлежащимъ нашимъ чувствамъ“, а самое восхожденіе ртути объяснялъ боязнью пустоты (мы говоримъ, о первомъ сочиненіи, представлявшемъ собою канву задуманнаго большого трактата).

Сравнивая обѣ теоріи, нельзя не сказать, что обѣ ложны. Съ одной стороны, объясненія Ноеля могутъ показаться даже имѣющими преимущество: пространство вверху барометра дѣйствительно не можетъ считаться абсолютною пустотой, особенно въ случаѣ водяного барометра, кажущаяся пустота котораго наполнена, очевидно, водянымъ паромъ. Но, вглядѣвшись ближе, не трудно усмотрѣть капитальную разницу между пріемами двухъ ученыхъ, даже по отношенію къ теоріи. Паскаль разсуждаетъ на основаніи опытовъ, имъ самимъ произведенныхъ и изученныхъ. Его вниманіе останавливается естественно на главной особенности этихъ опытовъ: на образованіи безвоздушнаго пространства съ его свойствами, того безвоздушнаго пространства, которое скоро, будучи образовано болѣе удобнымъ способомъ, сдѣлалось предметомъ изслѣдованія Бойля и другихъ. Не замѣчая въ этомъ пространствѣ явленій, свидѣтельствующихъ о присутствіи извѣстныхъ намъ формъ вещества, Паскаль не затрудняется признать его пустымъ и упрекаетъ своего противника въ томъ, что тотъ на опыты отвѣчаетъ предположеніями. „Вы приписываете все веществу, котораго не только качества, но и самое существованіе *предполагаете*... Такимъ путемъ можно разрѣшить какія угодно трудности. Приливъ моря, притяженіе магнита легко объясняются, если дозволено будетъ нарочно придумывать вещества и свойства“. Разсужденія ученаго іезуита, стремящагося не къ тому, чтобъ изучать явленіе, а чтобы показать, что явленіе не представляетъ для него ничего непонятнаго, и онъ легко можетъ объяснить его, основываются не на опытахъ, какъ они происходятъ въ дѣйствительности, а на томъ представленіи, какое составилось въ его головѣ на основаніи Паскалева же описанія. Это видно изъ всего изложенія отца Ноеля и доказано Паскалемъ. Паскаль, описывая опытъ съ стекляною трубкой, имѣющею внутри поршень и погруженною въ воду, причемъ конецъ ея закрытъ пальцемъ, говоритъ, что выдвигая поршень, онъ чувствуетъ вначалѣ, какъ палецъ его втягивается; „если выдвигать поршень дальше, то пустое пространство увеличивается, но палецъ чувствуетъ не болѣе втягиванія какъ прежде (n'en sent pas plus d'attraction)“. Ученый противникъ его, понявъ послѣднія слова въ смыслѣ „перестанетъ чувствовать втягиваніе“ (n'en sent plus aucune attraction), при изложеніи этого опыта,—который онъ описываетъ какъ очевидецъ,—подробно объясняетъ, почему въ началѣ движенія поршня палецъ чувствуетъ втягиваніе, а потомъ это ощущеніе совсѣмъ прекращается. Очевидно, ученый истолкователь явленія нашелъ-бы надлежащее объясненіе и въ томъ случаѣ, если бы понялъ описаніе Паскаля въ иномъ какомъ-либо смыслѣ, хотя-бы въ настоящемъ.

По поводу исторіи барометрическихъ опытовъ Паскаля, мы можемъ припомнить еще одинъ куріозный эпизодъ. Въ іюнѣ 1651 года въ монферранской іезуитской коллегіи происходилъ публичный диспутъ. Диспутантъ въ числѣ своихъ тезисовъ поставилъ слѣдующій:

„Есть нѣкоторые любители новизны, которые хотятъ выдать себя за изобрѣтателей извѣстнаго опыта, принадлежащаго Торричелли, сдѣланнаго также въ Польшѣ; несмотря на то, эти лица, желая присвоить себѣ этотъ опытъ, опубликовали его въ Оверни, произведя въ Нормандіи". Намекъ на Паскаля былъ слишкомъ прозраченъ и побудилъ его писать къ президенту палаты въ Клермонъ-Ферранѣ и просить объясненія. Оказалось, что наставникъ диспутанта имѣлъ въ виду возбудить споръ съ цѣлью изложить опыты, которые онъ задумалъ, изобразилъ на доскѣ, выставивъ доску на видномъ мѣстѣ, и которые предназначались въ его воображеніи къ уничтоженію опытовъ Паскаля. „Но онъ ошибся, пишетъ президентъ де-Рибейра,... случилось, что никто не коснулся этого предмета, и ему пришлось сохранить приготовленный зарядъ до другого раза". Нельзя не согласиться, что и ученый противникъ Паскаля, объясняющій подробно опыты, которыхъ не дѣлалъ и не видалъ, и догадливый руководитель диспута, заготовившій опыты на доскѣ—любопытные типы эпохи.

Замѣчательно, что въ длинныхъ разсужденіяхъ своихъ отецъ Ноель—самостоятельно или нѣтъ, онъ не упоминаетъ — попадаетъ на вѣрную мысль объяснить опытъ Торричелли тяжестью воздуха. Во второмъ письмѣ къ Паскалю онъ указываетъ, что тонкій воздухъ, по его мнѣнію присутствующій въ кажущейся пустотѣ барометрической трубки, по самой тонкости своей не оказываетъ давленія на ртуть, тогда какъ воздухъ лежащій на поверхности ртути въ чашкѣ, тяжестью своей давитъ на ртуть и заставляетъ ее держаться въ трубкѣ на барометрической высотѣ. *)

Паскаль въ это время и самъ уже раздѣлялъ эту мысль. „Я восхищенъ, пишетъ онъ къ Ле-Пальеру, — что отецъ Ноель вошелъ въ идею людей, изслѣдовавшихъ опытъ съ наибольшею проницательностью; ибо вамъ извѣстно, что письмо великаго Торричелли къ сеньору Риччи, писанное болѣе четырехъ лѣтъ тому назадъ, показываетъ, что онъ имѣлъ именно эту мысль, къ которой болѣе и болѣе склоняются и всѣ наши ученые. Ждемъ однако удостовѣренія отъ опыта, который скоро долженъ быть сдѣланъ на одной изъ нашихъ высокихъ горъ. Не надѣюсь, впрочемъ, получить извѣстіе ранѣе какъ чрезъ нѣкоторое время. На письма, которыя я писалъ болѣе шести мѣсяцевъ тому назадъ, мнѣ все отвѣчали, что снѣгъ дѣлаетъ вершины горъ недоступными".

Опытъ со внесеніемъ барометра на гору, (въ сентябрѣ 1648 года), доказавшій, что давленіе воздуха уменьшается по мѣрѣ того какъ съ удаленіемъ отъ земли уменьшается вышележащій, давящій своимъ вѣсомъ слой воздуха, представлялся Паскалю какъ опытъ, рѣшающій вопросъ (experimentum crucis, по терминологіи Бекона) и названъ „великимъ опытомъ равновѣсія жидкостей" (grande expérience de l'équilibre des liqueurs).

---

*) „L'air qui couvre la surface du vif-argent dans le tube... ne pèse ni ne charge point ce vif-argent... mais selui qui est sur la surface de la cuvette pèse et la charge".

V.

Чтобы пополнить исторію открытія атмосфернаго давленія, скажемъ объ участіи въ этомъ вопросѣ Декарта.

Еще за двѣнадцать лѣтъ до опыта Торричелли Декартъ имѣлъ представленіе о давленіи воздуха, происходящемъ отъ его вѣса. *) Въ его письмѣ къ неизвѣстному лицу, отъ 2-го іюля 1631 года (*Oeuvr.*, VI, 204), онъ говоритъ: „Представьте себѣ, что воздухъ есть какъ бы масса шерсти или волоса, а эѳиръ въ его порахъ какъ-бы вихрь вѣтра, движущійся въ этой массѣ. Вѣтеръ этотъ препятствуетъ тому, чтобы частицы воздуха сильно давили однѣ на другія, какъ иначе было-бы ибо частицы эти всѣ имѣютъ вѣсъ и давятъ однѣ на другія, на сколько движеніе эѳира это позволяетъ. Такимъ образомъ, шерсть, при землѣ лежащая, сдавлена всею тою шерстью, какая простирается надъ нею за предѣлы облаковъ. Оттого, если бы требовалось поднять часть этой шерсти, находящуюся при точкѣ O, со всею тою, какая находится выше по линіи OP*q*, то потребовалась-бы значительная сила. Но тяжесть эта въ воздухѣ обыкновенно не чувствуется, когда его толкаютъ кверху, ибо когда мы поднимаемъ часть его гдѣ нибудь отъ точки *i* къ G, воздухъ, находящійся при G идетъ кругообразно по HGB и возвращается къ *i*: тяжесть не чувствуется, какъ не чувствуется тяжесть колеса, когда оно приводится во вращеніе, будучи хорошо уравновѣшено на своей оси. Но въ указываемомъ вами случаѣ, когда трубка, наполненная ртутью и закрытая при концѣ *d*, укрѣплена въ потолкѣ AB, ртуть изъ открытаго конца *r*, чтобы разомъ спуститься, должна перемѣстить шерсть отъ *r* къ O и ту, которая при O къ P и *q*, такъ, чтобы была поднята вся колонна OP*q*, а колонна эта въ совокупности своей весьма тяжела; шерсть-же, такъ какъ трубка сверху закрыта, не можетъ войти въ нее, чтобы занять мѣсто наполняющей ее ртути... Не должно впрочемъ думать, чтобы нельзя было никакою силою отдѣлить ртуть отъ вершины трубки при потолкѣ: сила эта должна равняться той, какая требуется, чтобы поднять соотвѣтствующую колонну воздуха, простирающуюся выше облаковъ“.

Фиг. 1.

Въ письмѣ къ отцу Мерсенну (въ октябрѣ 1638 г.) о только что прочтенномъ сочиненіи Галилея, Декартъ пишетъ, что не согласенъ съ Галилеевымъ объясненіемъ того факта, что вода не можетъ быть поднята насосомъ выше извѣстной высоты и говоритъ: „явленіе это не можетъ быть приписано пустотѣ, а или матеріи насоса или самой водѣ, скорѣе протекающей между насосомъ и трубкой, чѣмъ подняться выше, или наконецъ тяжести воды, уравновѣшивающей тяжесть воздуха (ne doit point se rapporter au vide, mais ou à la matière des

*) Въ одномъ изъ писемъ Декарта находимъ указаніе способа опредѣленія вѣса воздуха. *Oeuvr.* VIII, 567.

pompes ou à celle de l'eau même qui s'ecoule entre la pompe et le tuyau plutôt que de s'élever plus haut, ou même à la pesanteur de l'eau qui contrebalance celle de l'air)". (*Oeuvr*. VII, 436).

Тяжестью воздуха объяснялъ также Декартъ, почему вода не выливается изъ сосуда, закрытаго сверху и имѣющаго внизу маленькія отверстія. „Вода, говоритъ онъ въ письмѣ къ отцу Мерсенну отъ 15 декабря 1638 года (*Oeuvr*. VIII, 36), остается въ такого рода сосудахъ, употребляемыхъ въ садахъ для поливки, не отъ боязни пустоты, ибо, какъ вы очень хорошо говорите, тонкая матерія могла бы легко войти на мѣсто воды, но по причинѣ тяжести воздуха. Ибо если бы вода вышла, а на мѣсто ея вошла только тонкая матерія, то вода должна бы была приподнять все тѣло воздуха до его предѣла (haußer tout le corps de l'air jusques à la plus haute superficie)".

Съ опытомъ Торричелли Декартъ ознакомился во время поѣздки изъ Голландіи, гдѣ онъ жилъ, во Францію, въ 1644 г. Впослѣдствіи въ двухъ письмахъ къ Каркави отъ 5-го іюня и 17-го августа 1649 года (*Oeuvr*. X, 351) онъ припоминаетъ о своей бесѣдѣ по поводу этого опыта съ Паскалемъ. Первое письмо писано, когда до Декарта дошелъ слухъ объ опытѣ Паскаля съ восхожденіемъ на гору. Онъ высказываетъ нѣкоторое неудовольствіе, что не получилъ отъ самого Паскаля извѣщенія объ удачѣ испытанія, мысль котораго онъ „подалъ два года тому назадъ". Каркави исполнилъ желаніе Декарта. „Очень благодарю, отвѣчаетъ Декартъ въ слѣдующемъ письмѣ (отъ 17-го августа), что вы потрудились сообщить мнѣ объ успѣхѣ опыта Паскаля касательно ртути, менѣе высоко восходящей въ трубку, которая на горѣ, чѣмъ въ трубку, находящуюся внизу. Я имѣлъ нѣкоторый интересъ узнать объ этомъ, такъ какъ именно я, два года тому назадъ, просилъ его сдѣлать такой опытъ и завѣрялъ, что опытъ удастся, какъ вполнѣ согласный съ моими началами. Безъ этого онъ не подумалъ-бы о такомъ опытѣ, такъ какъ былъ противнаго со мною мнѣнія. Прошу васъ также въ виду присланнаго имъ ко мнѣ прежде небольшого печатнаго описанія его первыхъ опытовъ, въ которомъ онъ обѣщалъ опровергнуть мою тонкую матерію—передать, когда его увидите, что я ожидаю его опроверженія и приму благожелательно, какъ всегда принимаю возраженія, сдѣланныя безъ клеветы (faites sans calomnie)".

Паскаль ничѣмъ не отозвался на заявленіе Декарта. Противники Декарта обвинили его въ желаніи присвоивать чужія изобрѣтенія. Приведенное выше письмо 1631 года свидѣтельствуетъ, что Декартъ давно былъ въ кругѣ идей о тяжести и давленіи воздуха. Насколько ясно указалъ Декартъ въ бесѣдѣ съ Паскалемъ на разницу этого давленія вверху и внизу, нынѣ рѣшить, конечно, нельзя. Но уже обращеніе съ напоминаніемъ, чрезъ Каркави, къ самому Паскалю, свидѣтельствуетъ, что Декартъ убѣжденъ былъ въ своемъ правѣ на первую идею опыта.

Изобрѣтеніе воздушнаго насоса бургомистромъ города Магдебурга Отто фонъ-Герике, не жалѣвшимъ средствъ для производства опытовъ, и опытъ съ новымъ снарядомъ какъ изобрѣтателя, такъ и англійскаго ученаго Бойля, ввели вопросъ о давленіи воздуха въ новую фазу. Воздушный насосъ далъ возможность обнаружить давленіе воздуха по-

мощью самыхъ рѣзкихъ и неопровержимыхъ опытовъ. Изслѣдованіе упругости воздуха, въ связи съ ученіемъ Паскаля о распространеніи давленія въ жидкихъ и газообразныхъ тѣлахъ, уяснило значеніе упругости и вѣса воздуха въ явленіи атмосфернаго давленія и устранило неясное представленіе этого давленія на подобіе вѣса нѣкотораго груза, лежащаго выше препятствія, на которое онъ дѣйствуетъ.

Проф. *Н. Любимовъ*.

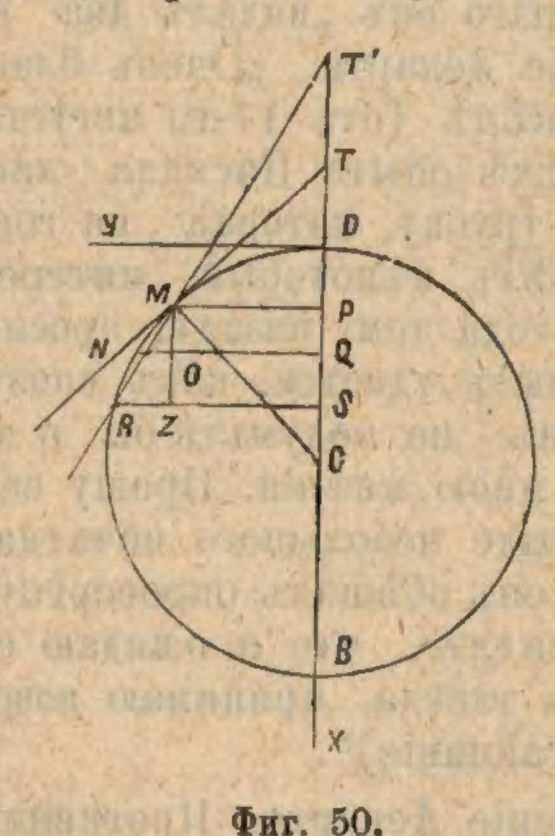
(Продолженіе слѣдуетъ).

О БЕЗКОНЕЧНОСТИ.

(Продолженіе).*

VIII.

Другой вопросъ, изъ за чего хлопотали Лейбницъ и др., очень интересенъ и хорошо разъяснится на примѣрѣ, заимствованномъ мною изъ цитированнаго уже сочиненія *Carnot*.



Фиг. 50.

Пусть требуется по способу безконечно-малыхъ найти длину подкасательной для окружности (см. фиг. 50). Примемъ послѣднюю за многоугольникъ съ безконечно-малыми сторонами и будемъ считать, что касательная NMT сливается съ одной изъ этихъ сторонъ и ея продолженіями. Тогда изъ чертежа, построеніе котораго очевидно, будемъ имѣть:

$$\frac{MO}{NO} = \frac{TP}{MP}.$$

Съ другой стороны изъ уравненія окружности, радіусъ которой обозначимъ чрезъ r, имѣемъ для точки M:

$$y^2 = 2rx - x^2,$$

а для точки N:

$$(y + NO)^2 = 2r\,(x + MO) - (x + MO)^2.$$

Вычитая изъ послѣдняго уравненія предыдущее, послѣ простыхъ преобразованій получимъ:

$$\frac{MO}{NO} = \frac{2y + NO}{2r - 2x - MO}.$$

---

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“ № 165.

Сравнивая же вторыя части перваго и послѣдняго равенствъ, найдемъ:

$$TP = \frac{y(2y + NO)}{2a - 2x - MO}.$$

Такъ какъ NO и MO суть величины безконечно-малыя, то, пренебрегая ими по ихъ относительной малости, получимъ

$$TP = \frac{y^2}{a - x}.$$

Результатъ несомнѣнно вѣрный, но путь полученія его, конечно, не выдерживаетъ критики, коль скоро не введено понятія о предѣлѣ или какихъ либо другихъ косвенныхъ соображеній. Для насъ въ данномъ случаѣ важна не критика метода, а уясненіе, почему безконечно-малыя величины считались чрезвычайно малыми. Изъ приведеннаго примѣра это очевидно: во что бы то ни стало, надо было пренебречь MO и NO, поэтому уподобляли MO песчинкѣ, а радіусъ землѣ.

„Die Geschichte dieser neuen Wissenschaft (исчисленія безконечно-малыхъ) говоритъ *Stolz* *), erzählt von Misserverständnissen und Widersprüchen in den Grundbegriffen".

Характеренъ слѣдующій эпизодъ изъ той эпохи **). Когда *Bossut* обратился къ *Tontoine* за разъясненіемъ одного вопроса по поводу безконечно-малыхъ, то послѣдній отвѣтилъ ему: «Примите безконечно-малыя величины за гипотезу, изучайте ихъ приложенія и вѣра придетъ къ Вамъ».

Es lässt sich in der That schwer begreifen, прибавляетъ *Stolz*, wie hervorragende Mathematiker z. B. Johann *Bernoulli* und sein Schüler der Marquis de *L'Hospitale* ja selbst noch *Poisson* die Behauptung aufstellen konnten, es gebe Grössen, welche von Null verschieden und gleichwohl kleiner seien, als jede angebbare Grösse. Demnach soll ein Mittleres zwischen Null und endlicher Grösse, zwischen Hichts uud Etwas vorhanden sein! —

Какъ бы то ни было, прежде метафизическая сторона опредѣленія безконечно-малыхъ имѣла свой raison d'être, а теперь же не имѣетъ ни малѣйшаго.

Чѣмъ-же объясняется, спроситъ читатель, что она существуетъ и по днесь?

Я оставляю этотъ вопросъ открытымъ. ***)

---

*) *Stolz*. Grösen und Zahlen. 1891, стр. 14.

**) Тоже, стр. 14.

***) Съ исторической точки зрѣнія любопытно замѣтить, что существовали попытки отождествить безконечно-малыя величины съ нулями. „Certains auteurs, — говоритъ Freycinet (De l'analyse infinitésimale, стр. 45), — en sont venus à considérer *dy*

IX.

Мнѣ остается сдѣлать еще два замѣчанія по поводу безконечно-малыхъ величинъ. Одно изъ нихъ имѣетъ чисто педагогическій характеръ и относится къ тому способу выраженія, который называетъ безконечно-малыми величинами такія, предѣлъ которыхъ равенъ 0. Очевидно, что понятіе о предѣлѣ предполагаетъ понятіе о безконечно-малой величинѣ, поэтому казалось бы болѣе естественнымъ выработать сначала послѣднее, а потомъ уже переходить къ понятію о предѣлѣ. Т. е., другими словами, естественнѣе и умѣстнѣе въ опредѣленіе безконечно-малыхъ не вводить понятія о предѣлѣ.

Заключеніе наше только усилится, если мы прибавимъ, что въ строгомъ смыслѣ безконечно-малыя величины вовсе не имѣютъ предѣла, а 0 можно считать таковымъ только по условіямъ, вводящимъ его въ категорію величинъ или чиселъ.

X.

Другое замѣчаніе имѣетъ въ виду дѣлаемую нѣкоторыми авторами прибавку къ опредѣленію, — прибавку, утверждающую, что безконечно-малая величина никогда не можетъ обратиться въ 0.

Такъ *Bertrand* *) говоритъ: „On nomme infiniment petit ou quantité infiniment petite, un nombre ou une grandeur variable qui diminue

---

et dx, non plus comme des accroissements infiniment petits, mais comme de *véritables zéros*. Dès lors, le rapport $\frac{dy}{dx}$ ou plutôt $\frac{0}{0}$ est envisagé comme synonyme de $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$ et par suite de $f'(x)$; à la faveur de cet expédient on peut écrire

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \text{ ou } dy = f'(x)\, dx.$$

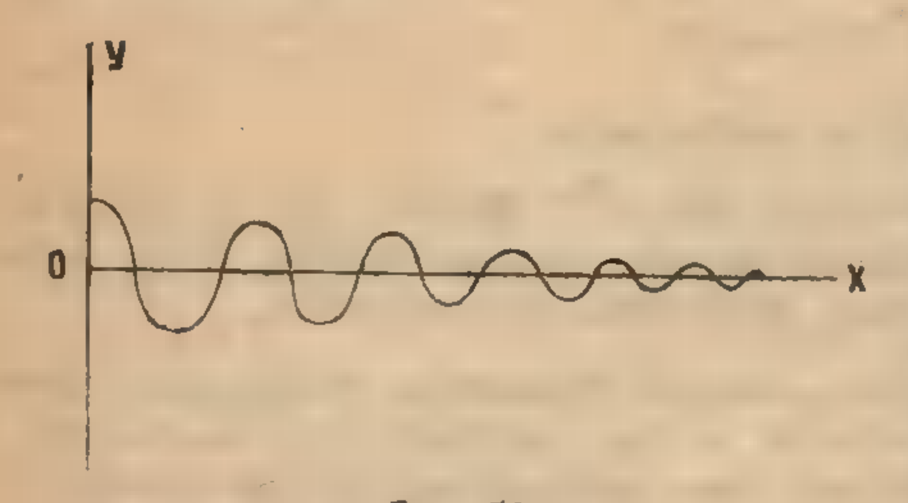
Mais qui ne voit là une subtilité destinée à tromper les yeux plutôt que l'esprit? car si les accroissements sont ramenés à l'état de purs zeros, ils n'ont plus aucune signification.

Замѣчательно, что и *Эйлеръ* впалъ въ подобную ошибку (см. *Буняковскій*, Лексиконъ чистой и прик. матем.; стр. 414 и *Stolz*, Grössen und Zahlen, стр. 15) и такимъ образомъ вышло, „dass er in einer und derselben Untersuchung die nämlichen zwei Grössen sowohl als gleich als auch ungleich betrachtet" (Stolz, стр. 15).

Тутъ-же кстати вспомнить о *методѣ недѣлимыхъ*, предшествовавшемъ открытію исчисленія безконечно-малыхъ. Изобрѣтатель этого метода *Кавальери* выражается такъ: (*Maximilien Marie*. Histoire des sciences mahématiques et physiques, T. VI, стр. 77): „Il est donc manifeste que nous considérons les figures planes comme formées (*contextae*) de fils parallèles, à l'instar des toiles, et les solides comme composés de feuilles, de même que les livres. Mais tandis que, dans les toiles, les fils, et, dans les livres, les feuilles sont en nombre fini, parse qui' il s'y trouve une certaine épaisseur, pour nous le nombre en est indéfini, parce que nous les considérons sans épaisseur".

*) *Bertand*. Traité de calcul differential et de calcul integral, стр. 1.

indéfiniment et s'approche autant qu'on veut d'une limite nulle, sans jamais l'atteindre".



Фиг. 51.

Мнѣ кажется, что это опредѣленіе вовсе не хочетъ сказать, что, напримѣръ, $^1/_n$ при извѣстныхъ условіяхъ можетъ быть названа безконечно-малою величиною, а ордината кривой, изображенной на чертежѣ (фиг. 51), никогда таковою быть не можетъ.

Я думаю, что цитируемое опредѣленіе просто хочетъ указать, что безконечно-малыя величины разсматриваются въ состояніи, отличномъ отъ 0. Это, конечно, вѣрно, но всетаки прибавка представляется излишней, потому что разумѣется въ упомянутомъ смыслѣ сама собою, и высказанная можетъ возбудить только недоразумѣніе. Вѣроятно это опредѣленіе находится въ связи съ тѣмъ общимъ воззрѣніемъ на предѣлъ, по которому перемѣнная величина никогда не достигаетъ его. — Взглядъ этотъ не удовлетворяетъ современнымъ научнымъ требованіямъ, какъ это было весьма убѣдительно показано *г. Киселевымъ* въ докладѣ, сдѣланномъ собранію гг. преподавателей математики во время послѣдняго съѣзда естествоиспытателей, и поэтому я объ немъ распространяться не буду. *)

XI.

Существуетъ еще и третье значеніе термина «безконечность», — въ смыслѣ условнаго предѣла безконечно-большихъ величинъ. Изъ изложеннаго ранѣе очевидно, что безконечно-большія величины не имѣютъ дѣйствительныхъ предѣловъ, но ничто, конечно, не мѣшаетъ приписать имъ предѣлы условные и называть ихъ какъ угодно.

По этому поводу однако слѣдуетъ оговориться: если эти условные предѣлы и употребляются въ наукѣ или въ учебникахъ, то, кажется, въ видѣ довольно рѣдкихъ исключеній. По крайней мѣрѣ въ довольно обширной литературѣ, имѣющейся у меня подъ руками, я нашелъ только одну книгу, разсматривающую безконечность съ условной точки зрѣнія, — это именно сочиненіе *г. Попова*: «Способъ предѣловъ и приложеніе его въ курсѣ элементарной математики. 1884 г. Пособіе для учащихся въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ». Поэтому въ дальнѣйшемъ изложеніи я и буду постоянно имѣть въ виду это *пособіе*.

Правда и *Коши* **) выражается такимъ образомъ: «Перемѣнная величина обращается въ безконечно-большую, когда ея численное значеніе, неопредѣленно возрастая, стремится къ предѣлу ∞».

---

*) См. „Педагогическій Сборникъ", 1890 г., Ноябрь, стр. 224.

**) *Коши*, Алгебраическій анализъ, стр. 26.

Но это, кажется. не болѣе какъ извѣстный способъ выраженія, точно также, какъ довольно часто употребляемая запись:

$$\lim f(x) = \infty$$

есть ничто иное, какъ сокращенное обозначеніе.

Это заключеніе является потому, что ни у Коши, ни у другихъ авторовъ, употребляющихъ подобныя записи, нельзя найти тѣхъ развитій, которыя вытекаютъ изъ разъ принятаго опредѣленія.

Какъ бы то ни было, противъ самаго принципа условныхъ предѣловъ a priori ничего сказать нельзя, и для оцѣнки его необходимо ознакомиться, вопервыхъ, съ даннымъ ему развитіемъ и, во вторыхъ, съ ожидаемыми отъ введенія его пользами.

Займемся сначала первымъ вопросомъ.

XII.

Всѣ разъясненія, которыя г. Поповъ считаетъ нужнымъ сдѣлать по поводу введенія условной безконечности, исчерпываются слѣдующимъ *): «Величины безконечно-большія не имѣютъ предѣломъ своего увеличенія конечной величины, но, по аналогіи съ конечными перемѣнными и безконечно-малыми, полагаютъ, что и онѣ имѣютъ предѣлъ, который есть постоянная величина, не выражающаяся никакимъ конечнымъ числомъ. Этотъ предѣлъ безконечно-большихъ величинъ обозначается знакомъ ∞ и называется *безконечностью.* Поэтому безконечность (∞) подобно 0 разсматриваютъ какъ количество постоянное. Но какъ нулю, такъ и безконечности, нельзя приписывать, кромѣ указаннаго свойства (?), другихъ свойствъ предѣловъ перемѣнныхъ величинъ, которыя предѣламъ могутъ принадлежать, какъ величинамъ постояннымъ, напримѣръ, тѣ свойства, которыя принадлежатъ числамъ».

Вотъ и все **). Мнѣ кажется, что этого далеко не достаточно. Прежде всего, какія же свойства принадлежатъ безконечности, какъ предѣлу? Характеристическое свойство предѣловъ формулировано г. Поповымъ такъ (стр. 38): «Перемѣнная величина равна своему предѣлу, увеличенному или уменьшенному на безконечно-малую величину». Примѣняется ли это свойство къ предѣлу безконечности? Если не примѣняется, то въ какомъ же смыслѣ здѣсь надо понимать слово предѣлъ? Если примѣняется, то какъ выйти изъ такого противорѣчія.

Пусть X и $У$ двѣ безконечно-большія величины, а α и β соотвѣтственныя разности между этими перемѣнными и ихъ предѣлами.

$$\text{Тогда:}\quad \infty = X + \alpha$$

$$\infty = У + \beta$$

---

*) Стр. 40.

**) Если не считать нѣсколькихъ замѣчаній на стр. 40, которыя по существу не прибавляютъ ничего новаго.

Отсюда: $X - У =$ безконечно-малой величинѣ, т. е., разность всякихъ двухъ безконечно-большихъ величинъ есть величина безконечно-малая. Это очевидный абсурдъ.

Можетъ быть онъ объясняется неправильностью вывода: не всякія двѣ безконечности равны между собою. Въ такомъ случаѣ, когда же двѣ безконечности считать равными? На этотъ вопросъ у г. Попова нѣтъ отвѣта. Итакъ съ первыхъ же шаговъ ученія о новомъ символѣ, мы затрудняемся рѣшить даже основной вопросъ о равенствѣ двухъ «безконечностей». Пойдемъ далѣе, разсмотримъ одно изъ доказательствъ г. Попова, научность котораго онъ отстаиваетъ *).

Требуется доказать, что „постоянная величина, дѣленная на 0, равняется безконечности".

Доказательство таково: пусть a постоянная, а α безконечно-малая величина. Такъ какъ дѣлимое (a) количество постоянное, то частное $\left(\frac{a}{\alpha}\right)$ измѣняется только въ зависимости отъ измѣненія дѣлителя. Поэтому очевидно, что частное достигаетъ своего предѣла одновременно съ дѣлителемъ, и потому

$$\text{пр.}\,\frac{a}{\alpha} = \frac{a}{\text{пр.}\,\alpha} = \frac{a}{0}\,^{**})$$

Съ другой стороны „по теоремѣ ***) шестой 3-й гл., $\frac{a}{\alpha}$ будетъ величиной безконечно большой, а потому

$$\text{пр.}\,\frac{a}{\alpha} = \infty\text{"}$$

Слѣдовательно:

$$\frac{a}{0} = \infty$$

Посмотримъ, на сколько все это „очевидно".

Читатель, конечно, согласится, что доказательства относительно символовъ должны вестись исключительно на почвѣ принятыхъ для нихъ условій, такъ какъ общіе числовые и логическіе законы не имѣютъ мѣста для символическихъ количествъ. Такъ, напримѣръ, для области ариѳметическихъ чиселъ всегда:

$$2a > a,$$

но странно было-бы на этомъ основаніи утверждать, что

$$2i > i.$$

*) См. статью *Попова* „Нѣсколько замѣчаній на статью г. *Попруженко* „О дѣленіи на нуль", „Педагогическій Сборникъ", Мартъ, 1892.

**) Стр. 54, примѣчаніе.

***) Стр. 78.

Если я не имѣю денегъ, то на извѣстномъ условномъ языкѣ, конечно, можно сказать, что я обладаю капиталомъ, но курьезно было-бы намѣреніе купить на этотъ капиталъ шестиэтажный домъ. По замѣчанію *Канта*, большая разница *думать*, что обладаешь сотней долларовъ и *имѣть* ихъ. Словомъ, очевидно, что нельзя примѣнять обычный строй мыслей къ фиктивнымъ объектамъ. Съ этой точки зрѣнія является вопросъ, какой смыслъ имѣетъ фраза: „частное достигаетъ своего предѣла?“ Предѣла-то вѣдь настоящаго нѣтъ, есть фикція.

Что значитъ достигать фикціи? Какимъ образомъ ее можно достигнуть? Неужели доказательство съ подобными посылками можно признать научнымъ?

Станемъ теперь на другую точку зрѣнія: согласимся съ г. Поповымъ, что частное достигнетъ своего предѣла одновременно съ дѣлителемъ, но и тогда все таки остается неяснымъ почему:

$$\text{пред.}\left(\frac{a}{\alpha}\right)=\frac{a}{\text{пр.}\,\alpha}.$$

Пусть $f(x)$ какая угодно функція отъ x. Примѣняя къ ней пріемы г. Попова, будемъ разсуждать такъ: $f(x)$ измѣняется только въ зависимости отъ измѣненія x. Поэтому очевидно, что $f(x)$ достигнетъ своего предѣла одновременно съ x, а потому:

$$\text{пр.}\ f(x)=f\,(\text{пред.}\ x).$$

Если признать это разсужденіе вѣрнымъ, то сразу упразднится цѣлый рядъ довольно сложныхъ доказательствъ, доставляющихъ не мало хлопотъ авторамъ элементарныхъ учебниковъ. Вспомнимъ, напримѣръ, теоремы о предѣлѣ a^x, о предѣлѣ $\lg x$ и др.

Но въ томъ-то и горе, что доказательство это не выдерживаетъ критики. Суть его можно резюмировать въ двухъ словахъ: когда x дѣлается равнымъ a, то $f(x)$ обращается въ $f(a)$.

Это безспорно справедливо, — но дѣло въ томъ, что не всякое предѣльное значеніе $f(x)$ можетъ быть разсматриваемо какъ частное значеніе этой функціи. Въ общемъ видѣ вопросъ ставится не такъ: чему равна $f(x)$ когда $x=a$, а такъ: если x безгранично приближается къ a, то не приближается-ли значеніе $f(x)$ къ какому нибудь постоянному числу? Весьма и весьма важно при этомъ то, что x, безгранично приближаясь къ a, можетъ однако, никогда не сдѣлаться равнымъ a. Если-бы было иначе, если-бы всегда x проходилъ черезъ a, то въ теоріи предѣловъ не было-бы никакой надобности.

Такъ что на какую-бы точку зрѣнія ни стать, все таки придется прійти къ заключенію, что изложеніе г. Попова удовлетворительнымъ признано быть не можетъ.

М. Попруженко (Оренбургъ).

(*Продолженіе слѣдуетъ*).

ЗАМѢЧЕННЫЕ ПРОМАХИ

въ Сборникѣ геометрическихъ задачъ для 7-го и 8 классовъ гимназій, составленномъ Н. Сорокинымъ, Кіевъ, 1892 г.

Этотъ сборникъ былъ принятъ многими гимназіями сочувственно и разошелся очень быстро, если авторъ выпустилъ его 2-е изданіе въ 1893 году.

Мы думали, что во 2-мъ изданіи найдемъ указанія на недостатки 1-го изданія и этого было бы достаточно, для пользы, которую могли бы принести оба изданія вмѣстѣ, но мы ошиблись. Въ предисловіи ко 2-му изданію авторъ говоритъ: „Второе изданіе въ общемъ повторяетъ собою первое, за исключеніемъ того, что прибавлено 20 задачъ (№№ 200—220) спеціально на вычисленія съ логариѳмическими таблицами (согласно выраженному мнѣ желанію гг. преподавателей); для рѣшенія нѣкоторыхъ задачъ сдѣланы необходимыя указанія и наконецъ прибавлена небольшая замѣтка о вращеніи плоскихъ фигуръ около внѣшней оси, лежащей въ ихъ плоскости и пр...“ Посмотримъ, такъ ли это на самомъ дѣлѣ и не слѣдуетъ ли сдѣлать нѣкоторое предостереженіе ученикамъ, пользующимся первымъ изданіемъ.

Въ задачѣ № 1 слѣдовало автору въ 1-мъ вопросѣ сказать: „подъ какимъ угломъ бока съ нижнимъ основаніемъ прямая, соединяющая середины непараллельныхъ сторонъ трапеціи, пройдетъ чрезъ вершину этого треугольника“... и задача была-бы ученикамъ понятная и тригонометрическая. Напрасно авторъ во 2-мъ изданіи помѣстилъ задачу съ однимъ 2-мъ вопросомъ.

Въ задачѣ № 13 выраженіе для радіуса круга вписаннаго $R\sin\alpha\,\mathrm{tg}\left(45^0-\alpha/_2\right)$ проще даннаго авторомъ $\dfrac{R\sin 2\alpha}{4\sin^2\left(45^0+\alpha/_2\right)}$

Въ задачѣ № 20 (несообразной) если сказать: „изъ центра большей окружности къ меньшей, радіуса r, проведена сѣкущая...“ задача выходитъ очень хорошая и отвѣты на нее: 1) $\dfrac{r}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha\sin\left(45^0-\alpha/_2\right)}$ 2) $\dfrac{r}{\sin\alpha}$. Авторъ во 2-мъ изд. замѣнилъ эту задачу — задачею по проще и отвѣту непосредственному на нее $\dfrac{a\sqrt{2}\sin\alpha.\sin\left(45^0-\alpha/_2\right)}{\cos\alpha/_2}$ предпочелъ болѣе сложный $\dfrac{a\sqrt{2}.\ \sin 2\alpha}{4\cos\alpha/_2.\cos\left(45^0-\alpha/_2\right)}$.

Задача № 33 съ несообразными отвѣтами поражаетъ читателя, а между тѣмъ задача очень интересная и не слѣдовало ее выкидывать

во 2-мъ изд., а только исправить отвѣты. По моему рѣшенію, уголъ при основаніи опредѣляется формулою $\cos x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$ а площадь формулою $\Delta = \frac{r^2}{2}\sqrt{58 + 26\sqrt{5}}$. Эту задачу авторъ во 2-мъ изд. замѣнилъ задачею, взятою изъ правильнаго пятиугольника.

Въ задачѣ № 34—отвѣтъ исправленъ авторомъ во 2-мъ изд.

Въ задачѣ № 42—отвѣтъ невѣренъ и онъ не исправленъ во 2-мъ изд. Сторона искомаго треугольника равна $\frac{2a}{\sin \alpha/_2}\sqrt{\frac{2\cot g\, \alpha/_2}{\sqrt{3}}}$.

Задача № 46 формулирована неопредѣленно, эта неопредѣленность исправлена во 2-мъ изд. и исправлена опечатка въ отвѣтѣ. Авторъ опредѣляетъ уголъ чрезъ $\sin x$, но проще употребить формулу $\operatorname{tg} x = \frac{\sin 2\alpha}{\sec^2 \varphi}$, полагая $\sqrt{2}.\cos\alpha = \operatorname{tg}\varphi$.

Въ задачѣ № 49 очевидная опечатка: пропущенъ въ отвѣтѣ множитель n^3; во 2-мъ изд. исправлено.

Въ задачѣ № 52, площадь описаннаго правильнаго многоугольника опредѣлена не вѣрно, она должна быть равна $\frac{n}{4}\, b_n^2 \cot g \frac{180^0}{n}$; ошибка не исправлена во 2-мъ изд.

Въ задачѣ № 55 радіусъ круга вписаннаго опредѣленъ не вѣрно; онъ равенъ $a.\operatorname{tg}\alpha/_2$. Ошибка во 2-мъ изд. исправлена.

Задача № 62 конфузитъ сборникъ своею несообразностью; это понялъ авторъ и въ новомъ изд. замѣнилъ ее другою задачею, для рѣшенія которой далъ указаніе. Въ этомъ указаніи проще было-бы сказать: вычислить внѣшніе отрѣзки x и y и изъ площади цѣлаго треугольника ABC вычесть площадь треугольника EFC.

Въ задачѣ № 65 требуется опредѣлить площадь треугольника CDB, а въ отвѣтѣ опредѣлена площадь ACD; опечатка во 2-мъ изд. исправлена. Во 2-мъ упражненіи къ этой задачѣ уголъ x опредѣленъ не вѣрно.

Въ задачѣ № 66 отвѣтъ не вѣренъ и не исправленъ во 2-мъ изд., площадь треугольника $OCD = d^2\cos^2 2\alpha.\operatorname{tg}\alpha$, а площадь треугольника $CDE = \frac{d^2}{2}\cos 2\alpha.\operatorname{tg}\alpha$, тогда отношеніе $\frac{OCD}{CDE} = 2\cos. 2\alpha$.

Въ задачѣ № 68 непосредственный отвѣтъ $4\sin^2(45^0 - \alpha/_4)\sin\alpha/_2$ и при $\alpha = 60^0$ отвѣтъ не $2\,a\,\frac{1}{2}$, потому что радіусъ круга вписаннаго меньше радіуса круга описаннаго.

Въ задачѣ № 82 авторъ означаетъ параллелограммъ буквами, не идущими по направленію стрѣлки часовъ, или по противуположному, какъ это принято, если не начерчена фигура, и вмѣсто выраженія: „и она вдвое болѣе меньшей высоты" слѣдовало сказать: „и эта сторона вдвое болѣе меньшей высоты", такъ какъ ученикъ можетъ отнести „она" къ касательной.

Задача № 97, для которой во 2-мъ изд. дано указаніе, можетъ быть рѣшена проще слѣд. обр.: Замѣтимъ, что касательныя r, пересѣкающіяся внутри треугольника ABC, какъ радикальныя оси равны между собою, а посему площадь треугольника

$$ABC = \frac{r^2 \sin A}{2} + \frac{r^2 \sin B}{2} + \frac{r^2 \sin C}{2} =$$

$$\frac{r^2}{2}(\sin A + \sin B + \sin C) = 2r^2 \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{2abc\sqrt{abc\,(a+b+c)}}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

Задача № 111 конфузитъ сборникъ своею несообразностью точно также, какъ и задача № 62; эту задачу авторъ выкинулъ во 2-мъ изд. и замѣнилъ задачею очень простою.

Въ задачѣ № 113 уголъ вычисленъ не вѣрно; ошибка исправлена во 2-мъ изданіи.

Въ задачѣ № 124 отвѣтъ не вѣренъ — онъ исправленъ во 2 изд.

Въ задачѣ № 129 вычисленіе второго угла не вѣрно — оно исправлено во 2-мъ изд.

Для задачи № 131 я нашелъ отвѣтъ $\frac{\pi\, a^3 \operatorname{tg} {}^{90^\circ}/_n}{16\cos^2\varphi}$, полагая

$$\frac{\operatorname{tg} {}^{90^\circ}/_{n3}}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg}\varphi.$$

Задачу № 132 авторъ разбилъ во 2-мъ изд. на двѣ задачи и помѣстилъ ихъ подъ №№ 132 и 133.

Въ задачѣ № 174 должно быть $S = 2\,\pi a^2$ вмѣсто πa^2 — очевидная опечатка.

Въ задачѣ № 184 отвѣтъ долженъ быть $\pi a^3 \operatorname{cosec}^2 {}^{\alpha}/_{2}$; напрасно авторъ переиначилъ задачу во 2-мъ изд.

Въ задачѣ № 187 отвѣтъ долженъ быть $8\,\pi R^3 \operatorname{cosec} \alpha$; эту задачу авторъ помѣстилъ во 2-мъ изд. подъ № 184 и исправилъ отвѣтъ.

Задача № 189 помѣщена во 2-мъ изд. подъ № 196.

Задача № 191 помѣщена во 2-мъ изд. подъ № 198.

Въ задачѣ № 192 ось вращенія, отстоящая на разстояніи $\frac{1}{4\sqrt{3}}$ AB отъ AB, пересѣкаетъ одну полуокружность; отвѣты даны не вѣр-

ные. Авторъ ту же задачу помѣстилъ во 2-мъ изд. подъ № 199 и въ ней разстояніе оси вращенія отъ AB беретъ равнымъ $\frac{AB}{2}$, при такой постановкѣ вопроса, поверхность вычислена вѣрно, но объемъ долженъ быть равенъ $\frac{\pi^2 a^3}{2\cos^3\alpha}$, а не $^7/_3\, \pi a^3 \sec^3 \alpha$.

Въ задачѣ № 194 вычислена только поверхность, ограниченная хордою AM и дугою MN, а поверхность отъ вращенія AN пропущена. Эту задачу авторъ во 2-мъ изданіи помѣстилъ подъ № 185 и исправилъ ошибку, только по моему вычисленію слѣдуетъ положить

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\,\mathrm{tg}\,\alpha \cos\left(45^0 - \alpha/_2\right) = \mathrm{tg}^2\varphi.$$

Вотъ тѣ замѣчанія, къ которымъ привело меня знакомство съ 1-мъ изданіемъ Сборника. Остальныя задачи, между которыми большинство согласно съ § 67 устава гимназій 1871 г. не требуетъ отъ учениковъ особой изобрѣтательности, превосходны и весьма полезны.

А. К. Жбиковскій.

Казань, 28 мая, 1893 г.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Высшіе слои атмосферы. Въ іюньской книжкѣ L'Astronomie напечатана интересная статья Gustave'a Hermite'a, объ изслѣдованіи высшихъ слоевъ атмосферы при помощи свободныхъ воздушныхъ шаровъ, снабженныхъ minimum-барометрами. *) Hermite продолжаетъ и расширяетъ свои опыты; особенно удаченъ былъ послѣдній изъ нихъ. Шаръ изъ лакированной перепонки (baudruche) вмѣстимостью въ 113 метр.^{3}, наполненный свѣтильнымъ газомъ, снабженный самопишущими барометромъ и термометромъ, **) а также особымъ приспособленіемъ для разбрасыванія вопросныхъ бланковъ, дѣйствующимъ при помощи горящаго трута, былъ пущенъ 21 марта (н. с.) въ 12 ч. 25 мин. въ Парижѣ и опустился въ Шанврѣ, у Жуаньи въ департаментѣ Іонны въ 7 ч. 11 мин. вечера, достигнувъ высоты въ *16.000 метровъ.* Ни одинъ шаръ еще не подымался на такую высоту. Высота эта была достигнута не

*) См. № 150 „Вѣстника Оп. Физики", стр. 132, а также замѣтку о предложеніи проф. Пильчикова въ № 160, стр. 85.

**) Одинъ самопишущій термометръ былъ помѣщенъ также внутри шара для сравненія температуры газа съ температурой внѣшняго воздуха.

смотря на то, что, судя по вѣсу шара съ приборами, онъ долженъ былъ-бы подняться всего на 13.500 метр. Это можно объяснить значительной интенсивностью солнечной радіаціи, благодаря чему заключенный въ шарѣ газъ принялъ температуру высшую температуры окружающаго воздуха, такъ что шаръ обратился въ монгольфьеръ. День былъ совершенно ясный и бѣлый шаръ сильно отражалъ солнечные лучи, такъ что до высшей точки его траекторіи за нимъ можно было слѣдить невооруженнымъ глазомъ, а, пользуясь астрономической трубкой съ микрометромъ, можно было опредѣлить истинную высоту поднятія, ибо шаръ былъ устроенъ такъ, чтобы объемъ его не измѣнялся во все время полета. Онъ блестѣлъ какъ Венера, когда она видима днемъ.

Самопишущій термометръ отмѣтилъ—51° на высотѣ 12,500 метр. (температура на поверхности + 17°), дальше показанія термометра и барометра прерываются вслѣдствіе замерзанія чернилъ въ регистрирующихъ аппаратахъ и возобновляются уже на высотѣ 16,000 метровъ, гдѣ барометръ отмѣтилъ 103 мм., а термометръ — 21. Это поднятіе температуры можно объяснить нагрѣваніемъ корзины, гдѣ находились аппараты, и воздуха, въ ней заключеннаго. Свѣтильня изъ трута, служившая для разбрасыванія вопросныхъ бланковъ, сгорѣла на длинѣ 0,24 метр., и затѣмъ потухла, благодаря недостатку кислорода.—Если допустить, что плотность атмосферы каждой планеты пропорціональна напряженію силы тяжести на ея поверхности, то „Аэрофилъ“ Hermite'а достигъ тѣхъ слоевъ атмосферы, плотность которыхъ меньше плотности лунной атмосферы; поэтому подобные опыты могли бы доставить данныя относительно температуры и солнечной радіаціи на поверхности луны. *В. Г.*

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Выставка математическихъ и физико-математическихъ приборовъ въ Мюнхенѣ будетъ открыта 1 августа настоящаго года и продолжится до 30 августа. Выставка эта была предположена въ Нюренбергѣ, во время 65-го съѣзда нѣмецкихъ естествоиспытателей и врачей, назначеннаго на 1892 годъ, но несостоявшагося по случаю холеры. Кромѣ германскихъ ученыхъ въ ней принимаютъ участіе и ученые другихъ странъ. Всѣ доставленные на выставку приборы сгруппированы въ слѣдующіе секціи и отдѣлы.

Первая секція. Ариѳметика, алгебра, теорія функцій, интегральное исчисленіе.

Отдѣлъ 1-й. *Ариѳметика:* А. Приборы для счета. В. Аппараты для исчисленія вѣроятности (иллюстрація закона ошибокъ).

Отдѣлъ 2-й. *Алгебра, теорія функцій:* C. Приборы для рѣшенія уравненій и построенія зависимости функцій. D. Модели и рисунки по алгебрѣ и теоріи функцій.

Отдѣлъ 3-й. *Интегральное исчисленіе:* E. Измѣрители линій. F. Измѣрители площадей (планиметры). G. Механическое интегрированіе.

Вторая секція. *Геометрія.* H. Приборы для черченія. J. Модели, употребляемыя при элементарномъ преподаваніи планиметріи, стереометріи, тригонометріи и начертательной геометріи. K. Многогранники и дѣленіе поверхностей и объемовъ на многоугольники и многогранники. L. Плоскія кривыя. M. Алгебраическія поверхности: поверхности 2-го порядка, поверхности высшихъ порядковъ. N. Кривыя двойной кривизны и развертывающіяся поверхности; прямолинейныя поверхности. O. Модели по линейной геометріи (новой). P. Модели и чертежи по теоріи кривизны, софокусныя поверхности 2-го порядка, линіи кривизны, ассимптотическія кривыя, геодезическія линіи; развертываніе однѣхъ поверхностей на другія; поверхности съ постоянной кривизной, съ постоянной средней кривизной; минимальныя поворхности. Q. Особенности кривыхъ линій и поверхностей.

Третья секція. *Прикладная математика:*

Отдѣлъ 1-й. *Механика.* R. Аппараты и приборы для демонстраціи основныхъ положеній динамики. S. Аппараты и приборы по кинематикѣ.

Отдѣлъ 2-й. T. Аппараты и приборы, иллюстрирующіе законы распространенія волнъ. U. Модели для объясненія кристаллическаго строенія. V. Модели для объясненія оптическихъ и электрическихъ свойствъ и упругости кристалловъ. W. Модели и рисунки по термодинамикѣ. X. Модели и приборы по электродинамикѣ.

Отдѣлъ 3-й. *Техническія примѣненія.* Инструменты по геодезіи, морскому дѣлу и метеорологіи.

Кромѣ того выставкѣ этой предполагаютъ придать историческій характеръ, собравъ здѣсь по возможности все, касающееся теорій, взглядовъ и изобрѣтеній выдающихся ученыхъ какъ прошлаго времени, такъ и настоящихъ дней.

Обращаемъ также вниманіе нашихъ читателей на недавно изданный (подъ ред. проф. Вальтера Дикка) каталогъ приборовъ, доставленныхъ на эту выставку еще въ прошломъ году, подъ заглавіемъ: „Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente“. Первая часть этой интересной книги (стр. 1—136), заключаетъ статьи: *Ф. Клейна*,—„Къ вопросу о геометрическомъ методѣ вычисленія дѣйствительныхъ корней алгебраическихъ уравненій“, *А. Фосса* „О равноудаленныхъ системахъ кривыхъ линій на кривыхъ поверхностяхъ“, *А. Брилля* „О разложеніи высшихъ особенностей алгебраической кривой на элементарныя“, *Г. Гаукка* „О конструктивныхъ постулатахъ геометріи пространства въ связи съ методами на-

чертательной геометріи", *А. Ф. Браунмюля* „Историческій обзоръ методовъ органическаго происхожденія кривыхъ линій отъ древнѣйшихъ временъ до конца XVIII столѣтія", *Л. Больцмана* „О методахъ теоретической физики", *А. Амслера* „О механическомъ интегрированіи" и *О. Генричи* „О приборахъ для гармоническаго анализа". Во второй части (стр. 137—430), въ коей данъ каталогъ приборовъ по вышеуказаннымъ секціямъ и отдѣламъ, нерѣдко, помимо обстоятельнаго описанія и теоріи прибора, приведены также историческія указанія.—Дополнительный томъ, въ который войдутъ приборы, доставляемые на выставку въ текущемъ году, будетъ изданъ особо.

Вообще Мюнхенская математическая выставка обѣщаетъ быть весьма интересной, и было бы очень прискорбно, если бы на ней отсутствовалъ русскій отдѣлъ.

Извѣстный нѣмецкій математикъ **Эдуардъ Куммеръ** скончался 2-го мая тек. года. Род. въ 1810 г., сначала былъ учителемъ математики, а съ 1842 г.—профессоромъ, сперва Вроцлавскаго, а затѣмъ (съ 1856 г.) Берлинскаго университета. Умершій въ концѣ 1891 г. знаменитый математикъ Кронекеръ былъ однимъ изъ учениковъ Куммера.

ЗАДАЧИ.

№ 491. Въ параллелограммъ вписанъ ромбъ такъ, что стороны его параллельны діагоналямъ параллелограмма. По даннымъ діагоналямъ параллелограмма опредѣлить сторону ромба.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 492. Рѣшить уравненіе

$$\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x.$$

А. Рѣзновъ (Самара).

№ 493. Показать, что параллелепипедъ, усѣченный непараллельно основанію, равновеликъ такому параллелепипеду, основаніе котораго равновелико основанію усѣченнаго параллелепипеда, а каждое изъ боковыхъ реберъ есть средняя ариѳметическая изъ боковыхъ реберъ усѣченнаго параллелепипеда, пользуясь только одной теоремой объ измѣреніи объемовъ, а именно: пирамиды, имѣющія равновеликія основанія и равныя высоты, равновелики.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 494. Найти сумму ряда

$$S = P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \ldots\ldots + nP_n,$$

гдѣ P_1, P_2, P_3, ... P_n суть символы, обозначающіе число возможныхъ перестановокъ изъ 1, 2, 3, ... n элементовъ.

И. Вонсикъ (Спб.).

№ 495. Найти простѣйшій способъ рѣшенія системы уравненій:

$$a_1 x_1 + b_1 (x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n) = c_1$$

$$a_2 x_2 + b_2 (x_1 + x_3 + \ldots\ldots + x_n) = c_2$$

$$a_3 x_3 + b_3 (x_1 + x_2 + x_4 + \ldots + x_n) = c_3$$

. . . .

$$a_n x_n + b_n (x_1 + x_2 + \ldots. + x_{n-1}) = c_n.$$

К. Тороповъ (Пермь).

№ 496. Въ вершинахъ равныхъ угловъ B и C даннаго равнобедреннаго треугольника ABC приложены параллельныя силы, изъ которыхъ каждая равна p. Выразить по p и углу A силу q, параллельную даннымъ, которую надо приложить въ вершинѣ A треугольника, чтобы равнодѣйствующая полученной системы прошла черезъ точку пересѣченія высотъ треугольника.

(Заимств.) *В. Г.* (Одесса).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 5 (2 сер.). Требуется построить четыреугольникъ такъ, чтобы его вершины лежали на четырехъ данныхъ прямыхъ (причемъ противоположныя вершины должны находиться на противоположныхъ прямыхъ), и чтобы его діагонали пересѣкались въ данной точкѣ и дѣлились въ ней въ отношеніяхъ $m:n$ и $p:q$. — Изслѣдовать задачу по отношенію къ положенію данной точки и взаимному расположенію прямыхъ.

Опускаемъ изъ данной точки O перпендикуляръ на одну изъ данныхъ прямыхъ M до точки A и на продолженіи его по другую сторону O откладываемъ OB такъ, чтобы $OA:OB = m:n$. Проведя изъ точки B прямую || M до пересѣченія съ данной прямой N, противоположной M, получимъ въ пересѣченіи ея съ N одну изъ вершинъ искомаго четыреугольника R. Точка пересѣченія прямыхъ OR и M будетъ второй вершиной четыреугольника T. Также находимъ остальныя двѣ вершины S и

U.—Очевидно, что если изъ 4-хъ данныхъ прямыхъ хотя двѣ параллельны, то задача вообще невозможна. Если точка Q лежитъ внѣ четыреугольника, образованнаго данными прямыми, то получается четырехсторонникъ.

А. Плетневъ (Спб.); *Н. Волковъ* (Воронежъ); *В. Х.* (Курскъ).

№ 310 (2 сер.). Сумма нѣкотораго числа натуральныхъ чиселъ, начинающихся съ 1, выражается числомъ, состоящимъ изъ трехъ одинаковыхъ цыфръ. Сколько чиселъ?

Если чиселъ x, а значущая цыфра суммы $= y$, то

$$\frac{x(x+1)}{2} = 111y,$$

откуда слѣдуетъ, что первая часть равенства должна дѣлиться на 111, т. е. на 3×37. Значитъ либо x, либо $x+1=37$. При $x=37$, $x(x+1)$ не дѣлится на 3, поэтому $x+1=37$, $x=36$, а сумма первыхъ 36 чиселъ натуральнаго ряда равна 666.

В. Буханцевъ (Борисоглѣбскъ); *К. Щиголевъ* (Курскъ); *Х. Едлинъ* (Кременч.); *О. Озаровская* (Псебай); *И. Вонсикъ* (Воронежъ); *А. Васильева*, *С. Бабанская* (Тифлисъ); *А. Гуминскій* (Троицкъ); *В. Шишаловъ* (Ив.-Вознес); *А. Рѣзновъ* (Самара); *В. Перельцвейгъ* (Полтава); *П. Ивановъ* (Одесса).

№ 326 (2 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\sin x + \cos mx = \cos x + \sin mx.$$

Изъ даннаго уравненія имѣемъ:

$$\sin x - \sin mx = \cos x - \cos mx =$$

$$= 2\cos\frac{mx+x}{2}\sin\frac{mx-x}{2} = -2\sin\frac{mx+x}{2}\sin\frac{mx-x}{2},$$

откуда

$$1)\quad \sin\frac{mx-x}{2}=0;\ \frac{mx-x}{2}=n\pi;\ x=\frac{2\pi n}{m-1};$$

$$2)\quad \operatorname{tg}\frac{mx+x}{2}=-1;\ \frac{mx+x}{2}=n\,180^0+135^0;$$

$$x=\frac{90^0}{m+1}(4n+3).$$

В. Буханцевъ (Борисоглѣбскъ); *А. П.* (Пенза); *А. Гуминскій* (Троицкъ); *С. Бабанская* (Тифлисъ); *В. Шишаловъ* (Ив. Вознесенскъ); *В. Перельцвейгъ* (Полтава); *А. Рѣзновъ* (Самара); *К. Щиголевъ* (Курскъ).

№ 341 (2 сер.). Показать что сумма n членовъ ряда

$$\lg 1, \lg 2, \lg 3, \lg, 4, \ldots\ldots$$

меньше, чѣмъ $n \lg n$.

Очевидно, что каждый изъ членовъ ряда $\lg 1 + \lg 2 + \lg 3 + \ldots\ldots + \lg n$ меньше послѣдняго члена $\lg n$, а потому и сумма меньше, чѣмъ $n \lg n$.

В. Перельцвейгъ (Полтава); *А. П.* (Пенза); *Х. Едлинъ* (Кременчугъ); *В. Буханцевъ* (Борисоглѣбскъ); *А. Охитовичъ* (Сарапуль); *О. Озаровская* (Спб.); *А. Мельниковъ* (Троицкъ); *В. Шишаловъ, И. Баскаковъ* (Ив.-Вознес.); *К. Щиголевъ* (Курскъ).

№ 345 (2 сер.). Почему число, выражающее сумму кубовъ натуральныхъ чиселъ, не можетъ оканчиваться на одной изъ цыфръ 2, 3, 7, 8 ?

Такъ какъ сумма кубовъ натуральныхъ чиселъ равна квадрату ихъ суммы (теорема Никомаха), т. е. представляетъ полный квадратъ, то очевидно, что она можетъ оканчиваться только на 1, 4, 5, 6, 9, 0.

А. Охитовичъ ((Сарапуль); *А. Мельниковъ, А. Гуминскій* (Троицкъ); *В. Перельцвейгъ* (Полтава); *К. Щиголевъ* (Курскъ); *П. Ивановъ* (Одесса).

№ 354 (2 сер.). Показать что если $6x + 11y$ дѣлится на 31, то и $x + 7y$ также раздѣлится.

Это очевидно изъ равенства

$$7(6x + 11y) - 11(x + 7y) = 31x,$$

въ которомъ уменьшаемое дѣлится на 31 по условію.

В. Буханцевъ (Борисоглѣбскъ); *И. Вонсикъ* (Воронежъ); *В. Шидловскій* (Полоцкъ); *В. Шишаловъ* (Ив. Вознес.); *К. Щиголевъ* (Курскъ); *П. Ивановъ* (Одесса).

№ 377 (2 сер.). Дана окружность и проведенная въ ней хорда. Вписать въ окружность равнобочную трапецію, высота которой равна средней ея линіи, такъ, чтобы данная хорда служила одной изъ параллельныхъ сторонъ этой трапеціи.

Длина бока искомой трапеціи равна сторонѣ вписаннаго въ данную окружность квадрата. Доказательство предоставляемъ читателямъ.

М. Акопянцъ (Спб.); *С. Бабанская, М. Городенскій* (Тифл.); *А. П.* (Пенза); *В. Буханцевъ* (Борисогл.); *К. Капріелли* (Одесса); *В. Шишаловъ, В. Баскаковъ* (Ив.-Вознес.); *А. Рѣзновъ* (Самара); *П. Хлѣбниковъ* (Тула).

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Одесса, 25-го Іюня 1893 г.

„Центральная типо-литографія", уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. Болгарова.